



INF 1366 – Computação Gráfica Interativa

Transformações

Alberto B. Raposo
abraposo@tecgraf.puc-rio.br
http://www.tecgraf.puc-rio.br/~abraposo/INF1366

Sistemas de Coordenadas

- Objetos em Computação Gráfica possuem descrições numéricas (modelos) que caracterizam suas formas e dimensões.
- Esses números se referem a um sistema de coordenadas, normalmente o sistema Cartesiano de coordenadas: **x**, **y** e **z**.
- Em alguns casos, precisamos de mais de um sistema de coordenadas:
  - Um sistema local para descrever partes individuais de uma máquina, por exemplo, que pode ser montada especificando-se a relação de cada sistema local das várias peças.

John Dingliana, 2004

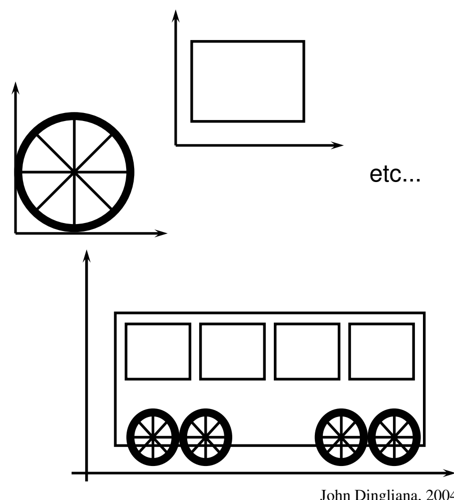
Transformações

- Em alguns casos, objetos exibem simetrias, de modo que apenas parte deles precisa ser descrita, pois o resto pode ser construído por reflexão, rotação e/ou translação do pedaço original.
- Um projetista pode querer visualizar um objeto sob vários pontos de vista, rotacionando-o ou movendo uma câmera virtual.
- Em animação, um ou mais objetos podem precisar se mover em relação ao outro, de modo que seus sistemas de coordenadas locais devam ser transladados e rotacionados ao longo da animação.

John Dingliana, 2004

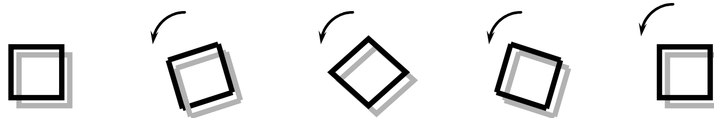
Exemplo 1

- Partes do objeto definidas em sistemas de coordenadas locais:
- Objeto "montado" por meio de transformação das partes constituintes:



John Dingliana, 2004

Exemplo 2



5 etapas de uma animação de um cubo girando

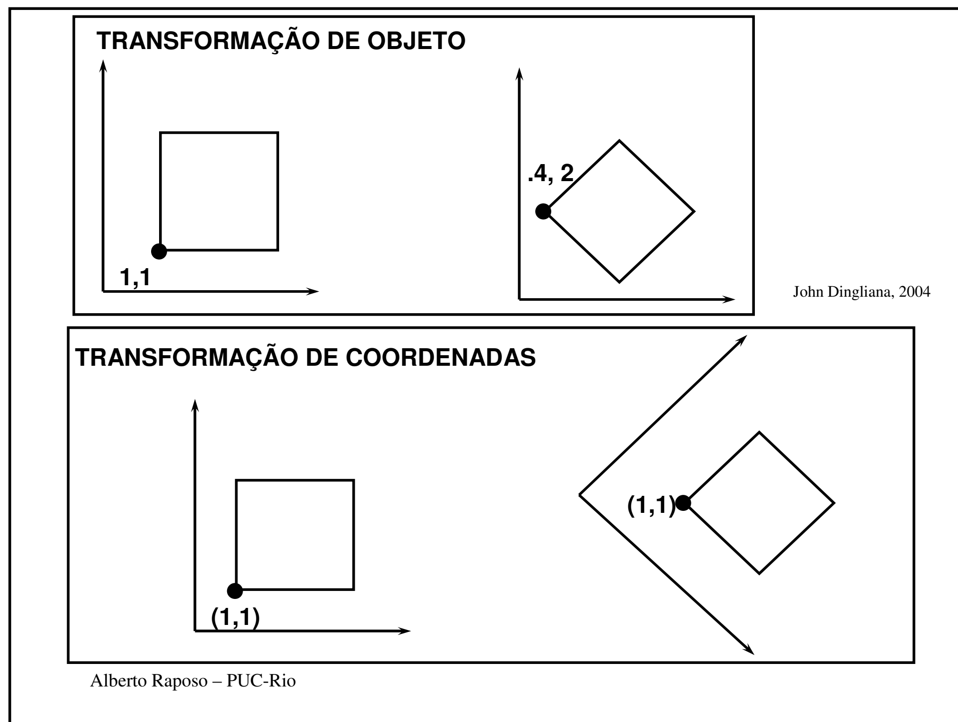
- A cada quadro da animação, o objeto é transformado (rotação, nesse caso).
- O objeto também poderia ser transformado pela mudança de tamanho (escalamento), sua forma (deformação), ou sua localização (translação).
- Outros efeitos de animação são obtidos sem alterar o objeto em si, mas a forma como ele é visualizado (transformação window to viewport) a cada quadro (por exemplo, um zoom).

John Dingliana, 2004

Transformações

- Há 2 formas de se enxergar uma transformação
  - Uma Transformação de Objeto altera as coordenadas de cada ponto de acordo com alguma regra, mantendo o sistema de coordenadas inalterado.
  - Uma Transformação de Coordenadas produz um sistema de coordenadas diferente, e então representa todos os pontos originais nesse novo sistema.
- Cada maneira tem suas vantagem, e são intimamente relacionadas.

John Dingliana, 2004



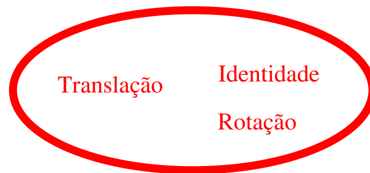
Classes de Transformações

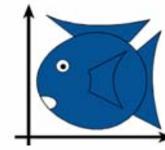
- Euclidianas / Corpos Rígidos
- de Similaridade
- Lineares
- Afins
- Projetivas

Transformações Euclidianas

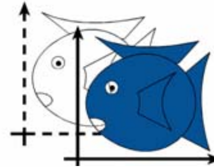
- Preservam distâncias
- Preservam ângulos

Corpos Rígidos / Euclidianas

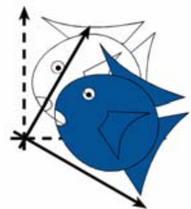




Identidade



Translação



Rotação

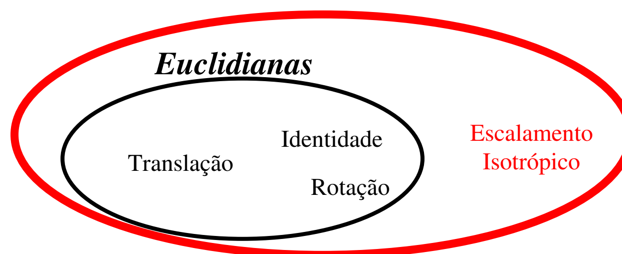
Alberto Raposo – PUC-Rio

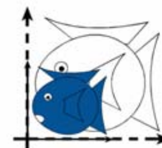
MIT EECS 6.837,
Durand and Cutler

Transformações de Similaridade

- Preservam ângulos

Similaridades



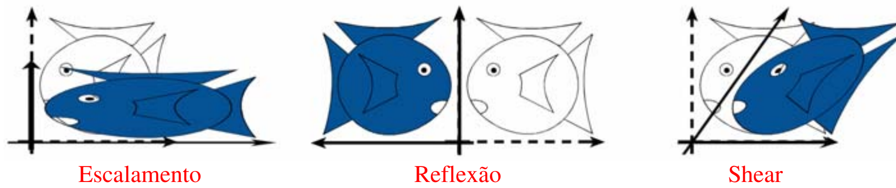


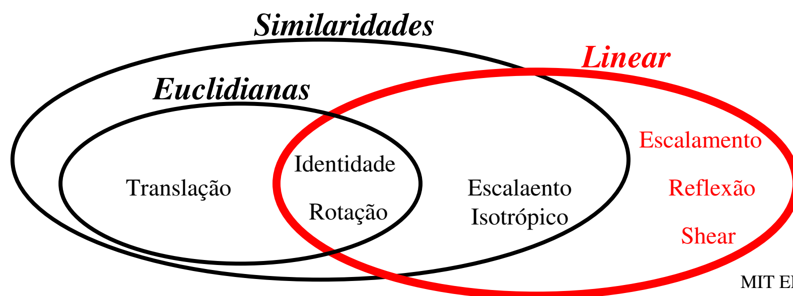
Escalamento
Isotrópico

Alberto Raposo – PUC-Rio

MIT EECS 6.837,
Durand and Cutler

Transformações Lineares



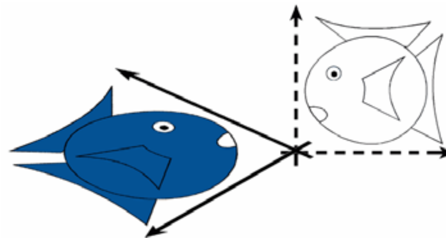


MIT EECS 6.837,
Durand and Cutler

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações Lineares

- $L(p + q) = L(p) + L(q)$
- $L(ap) = a\,L(p)$

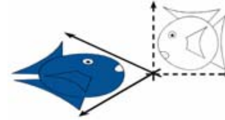


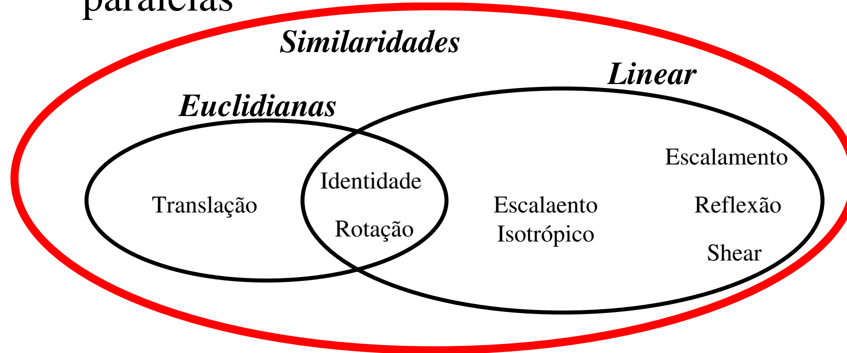
MIT EECS 6.837,
Durand and Cutler

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações Afins

- Preservam linhas paralelas

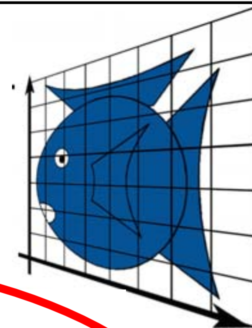


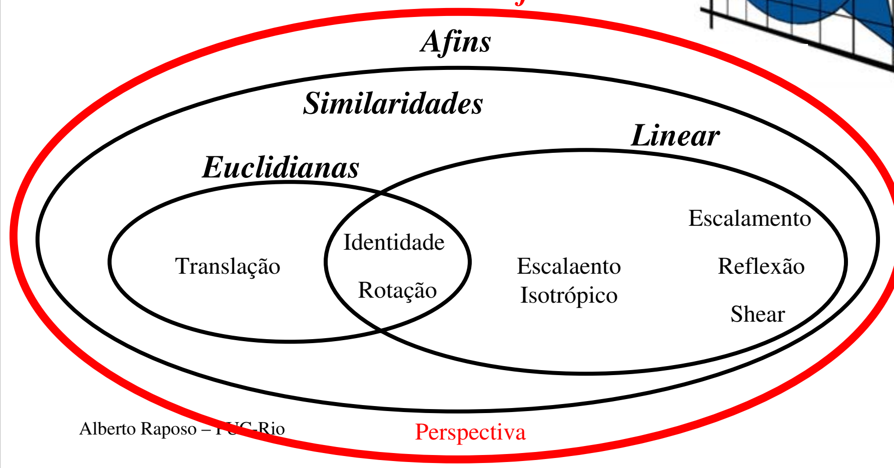


Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações Projetivas

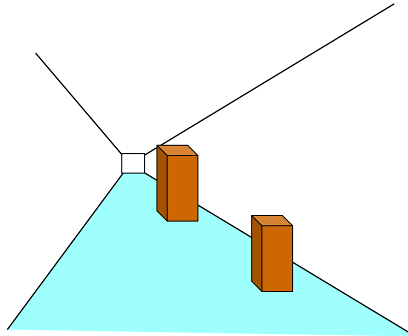
- preservam linhas





Alberto Raposo – PUC-Rio

Perpectiva

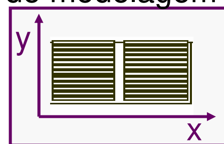


Perspectiva é um dos fatores que dá "aparência 3D" às cenas



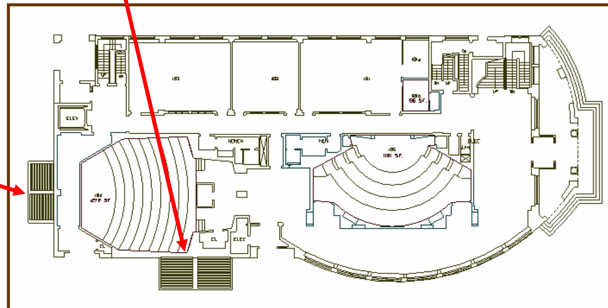
Transformações 2D

Coordenadas de modelagem



Escalamento
Translação

D. Brogan,
Univ. of Virginia

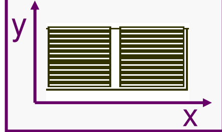


Escalamento
Rotação
Translação

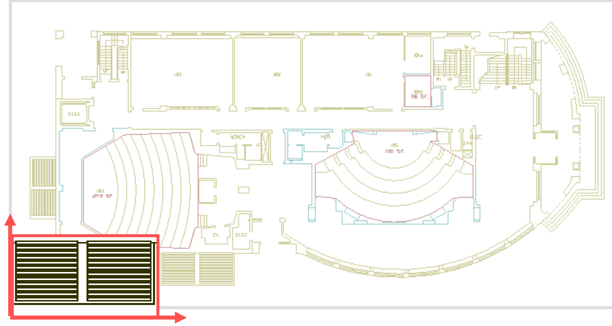
Coordenadas do mundo

Transformações 2D

Coordenadas de modelagem



D. Brogan, Univ. of Virginia

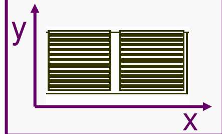


Localização inicial em (0, 0) com eixos x e y alinhados

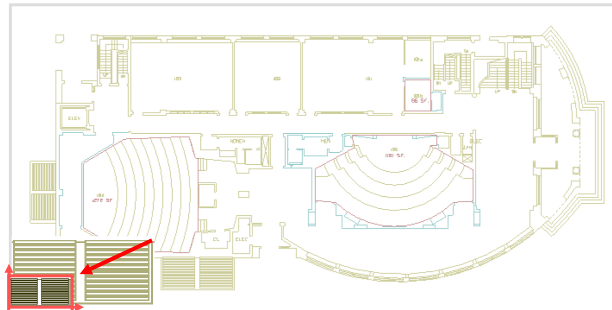
Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D

Coordenadas de modelagem



D. Brogan, Univ. of Virginia

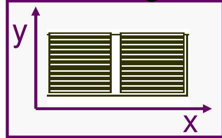


Scale .3, .3
Rotate -90
Translate 5, 3

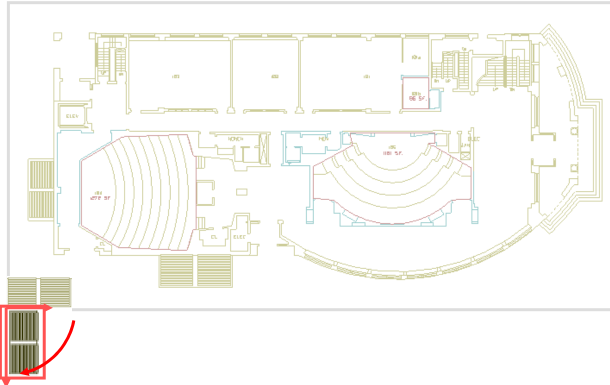
Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D

Coordenadas de modelagem



D. Brogan, Univ. of Virginia

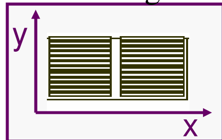


Scale .3, .3
Rotate -90
Translate 5, 3

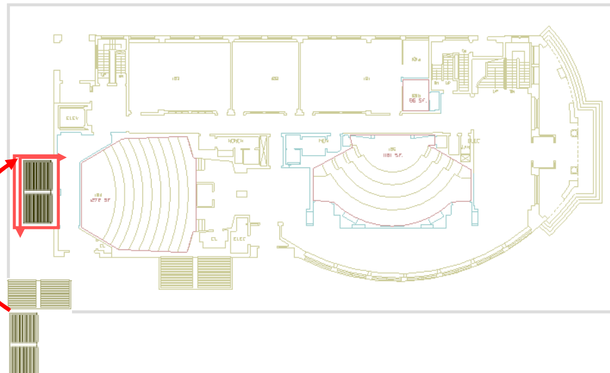
Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D

Coordenadas de modelagem



D. Brogan, Univ. of Virginia



Scale .3, .3
Rotate -90
Translate 5, 3

Alberto Raposo – PUC-Rio

VRML: Nó Transform

```
Transform {
  eventIn       MFNode      addChildren
  eventIn       MFNode      removeChildren
  exposedField SFVec3f     center           0 0 0   # (-∞,∞)
  exposedField MFNode      children         []
  exposedField SFRotation rotation         0 0 1 0 # [-1,1],(-∞,∞)
  exposedField SFVec3f     scale            1 1 1   # (0,∞)
  exposedField SFRotation scaleOrientation 0 0 1 0 # [-1,1],(-∞,∞)
  exposedField SFVec3f     translation      0 0 0   # (-∞,∞)
  field        SFVec3f     bboxCenter       0 0 0   # (-∞,∞)
  field        SFVec3f     bboxSize         -1 -1 -1# (0,∞)
                                                    # or -1,-1,-1
}
```

Alberto Raposo – PUC-Rio

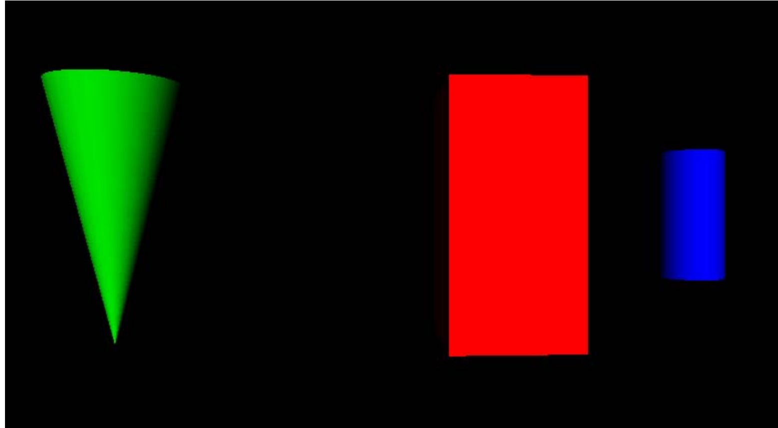
Exemplo em VRML

The Annotated VRML Reference

```
#VRML V2.0 utf8
DEF T1 Transform {      # Parent xform for entire file
  translation 0 0 -100  # Xlates entire file down Z
  scale 1 2 1           # Scales entire file in Y
  children [
    DEF T2 Transform {  # Default transform at origin
      children Shape {
        geometry Box {}
        appearance Appearance {
          material Material { diffuseColor 1 0 0 }
    }}}
    DEF T3 Transform {   # Re-centered and rotated
      center -3 0 0
      rotation 0 0 1 3.14
      children Shape {
        geometry Cone {}
        appearance Appearance {
          material Material { diffuseColor 0 1 0 }
    }}}
    DEF T4 Transform {   # Scaled (half) and xlated +X
      scale 0.5 0.5 0.5
      translation 3 0 0
      children Shape {
        geometry Cylinder {}
        appearance Appearance {
          material Material { diffuseColor 0 0 1 }
    }}}
  ]
}
```

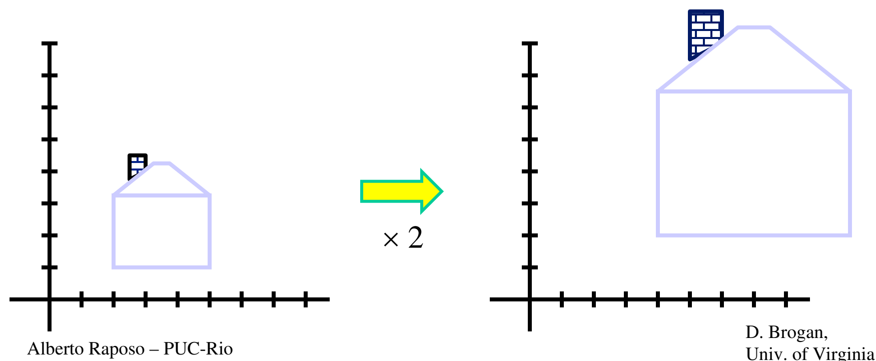
Alberto Raposo – PUC-Rio

Exemplo em VRML



Escalamento

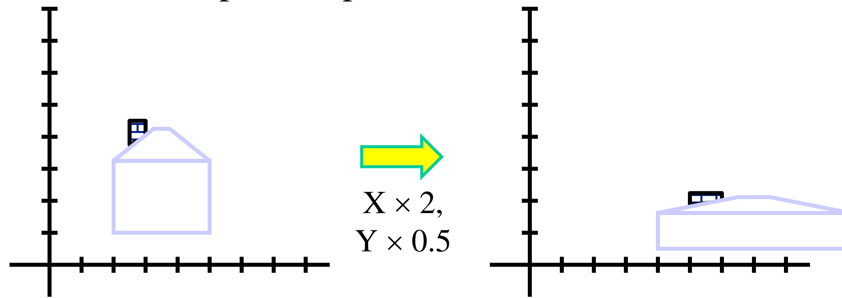
- *Escalar* uma coordenada significa multiplicar cada um de seus componentes por um valor escalar
- *Escalamento isotrópico* significa que esse valor escalar é o mesmo para todos os componentes



D. Brogan,
Univ. of Virginia

Escalamento

- *Escalamento não-isotrópico*: valores escalares diferentes por componente:



- *Como representar o escalamento na forma de matrizes?*

Alberto Raposo – PUC-Rio

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Escalamento

- Operação de escalamento: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$

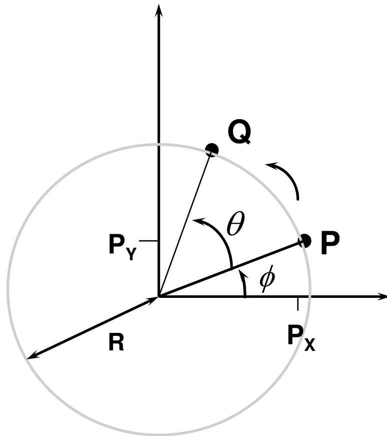
- Na forma matricial: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de escalamento}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Rotação 2D

John Dingliana, 2004



$Q_x = R\cos(\theta + \phi)$ [1]
$Q_y = R\sin(\theta + \phi)$ [2]

$P_x = R\cos(\phi)$ [3]
$P_y = R\sin(\phi)$ [4]

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$$

[1] ➡ $Q_x = R\cos(\theta)\cos(\phi) - R\sin(\theta)\sin(\phi)$

Substituindo de [3] e [4]...

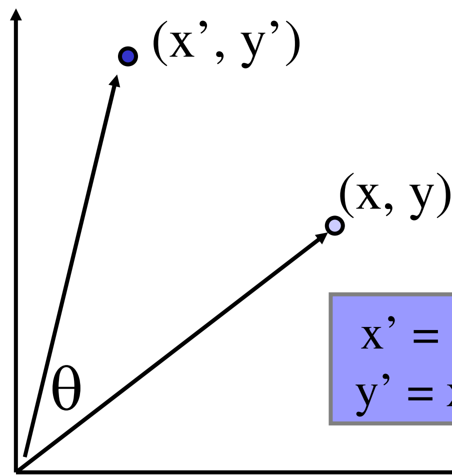
$$Q_x = P_x\cos(\theta) - P_y\sin(\theta)$$

Similarmente, a partir de [2]...

$$Q_y = P_y\cos(\theta) + P_x\sin(\theta)$$

Alberto Raposo – PUC-Rio

Rotação 2D



x' = x **cos**(θ) - y **sin**(θ)
y' = x **sin**(θ) + y **cos**(θ)

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Rotação 2D

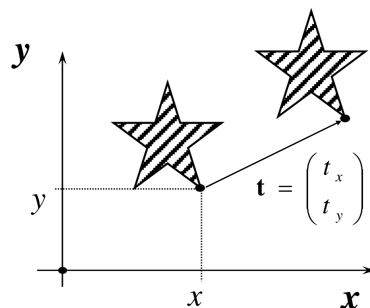
- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Embora sin(θ) e cos(θ) sejam funções não-lineares de θ,
  - x’ é combinação linear de x e y
  - y’ é combinação linear de x e y

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Translação 2D

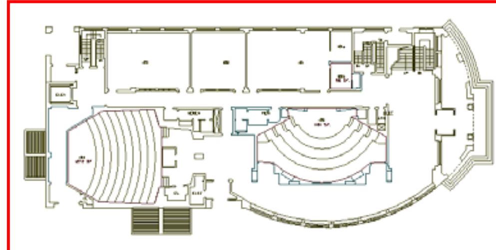


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \end{bmatrix}$$

M. Gattass, PUC-Rio

Transformações 2D Básicas

- Translação:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Escalamento:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Rotação:
  - $x' = x*\cos\Theta - y*\sin\Theta$
  - $y' = x*\sin\Theta + y*\cos\Theta$



Podem ser combinadas com álgebra simples

D. Brogan, Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D Básicas

- Translação:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Escalamento:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Rotação:
  - $x' = x*\cos\Theta - y*\sin\Theta$
  - $y' = x*\sin\Theta + y*\cos\Theta$

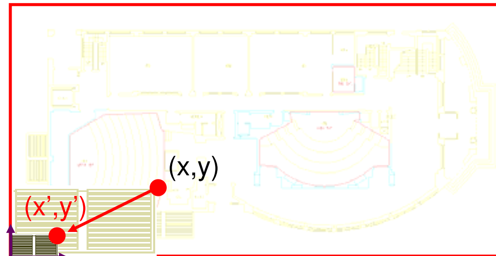


D. Brogan, Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D Básicas

- Translação:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Escalamento:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Rotação:
  - $x' = x*\cos\Theta - y*\sin\Theta$
  - $y' = x*\sin\Theta + y*\cos\Theta$



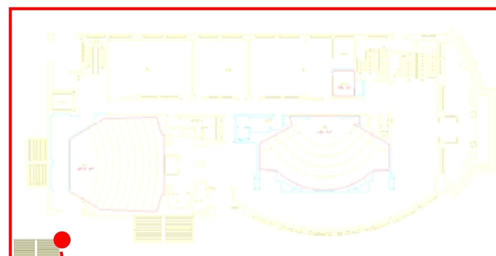
$x' = x*s_x$
$y' = y*s_y$

D. Brogan, Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D Básicas

- Translação:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Escalamento:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Rotação:
  - $x' = x*\cos\Theta - y*\sin\Theta$
  - $y' = x*\sin\Theta + y*\cos\Theta$



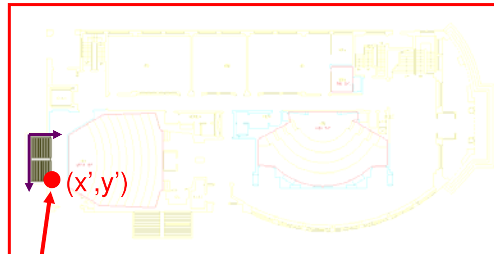
$x' = (x*s_x) *\cos\Theta - (y*s_y) * \sin\Theta$
$y' = (x*s_x) * \sin\Theta + (y*s_y) * \cos\Theta$

D. Brogan, Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Transformações 2D Básicas

- Translação:
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$
- Escalamento:
  - $x' = x * s_x$
  - $y' = y * s_y$
- Rotação:
  - $x' = x*\cos\Theta - y*\sin\Theta$
  - $y' = x*\sin\Theta + y*\cos\Theta$



$x' = ((x*s_x)*\cos\Theta - (y*s_y)*\sin\Theta) + t_x$
$y' = ((x*s_x)*\sin\Theta + (y*s_y)*\cos\Theta) + t_y$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Representação Matricial

- Representar transformação 2D por uma matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- Multiplicar matriz por vetor-coluna
  ⇔ aplicar transformação a um ponto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Representação Matricial

- Transformações são combinadas por multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrizes são uma forma conveniente e eficiente de representar uma seqüência de transformações

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Produto de Matrizes

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qm} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

neutro: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

M. Gattass, PUC-Rio

Alberto Raposo – PUC-Rio

Matrizes 2x2

- Que transformações planares podem ser representadas com uma matriz 2x2?

Identidade 2D?

$$x' = x \qquad y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escalemento 2D em torno de (0,0)?

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{s}_x * \boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{s}_y * \boldsymbol{y}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Matrizes 2x2

- Que transformações planares podem ser representadas com uma matriz 2x2?

Rotação 2D em torno de (0,0)?

$$x' = \cos\Theta * x - \sin\Theta * y$$
$$y' = \sin\Theta * x + \cos\Theta * y$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Matrizes 2x2

- Que transformações planares podem ser representadas com uma matriz 2x2?

Espelhamento 2D em torno de Y?

$$x' = -x \qquad y' = y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Espelhamento 2D em torno de (0,0)?

$$x' = -x \qquad y' = -y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Matrizes 2x2

- Que transformações planares podem ser representadas com uma matriz 2x2?

Translação 2D?

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

NÃO!

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Coordenadas Homogêneas

- **Como representar uma translação como matriz 3x3?**

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

Coordenadas Homogêneas

•**Coordenadas homogêneas**

– representam coordenadas em 2 dimensões com vetor 3

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{coord. homogêneas}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ***Coordenadas Homogêneas parecem pouco intuitivas, mas elas simplificam muito as operações gráficas***

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Coordenadas Homogêneas

- **Como representar uma translação como matriz 3x3?**

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

D. Brogan,
Univ. of Virginia

Resp: Usando a terceira coluna da matriz

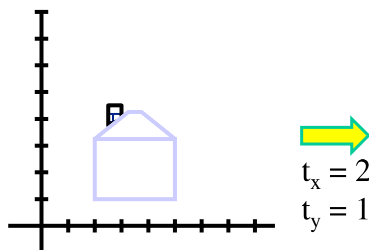
$$Translação = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação

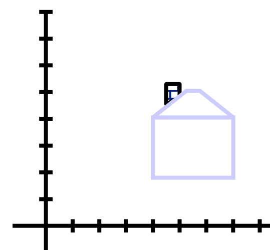
•Exemplo

•Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



$t_x = 2$
$t_y = 1$

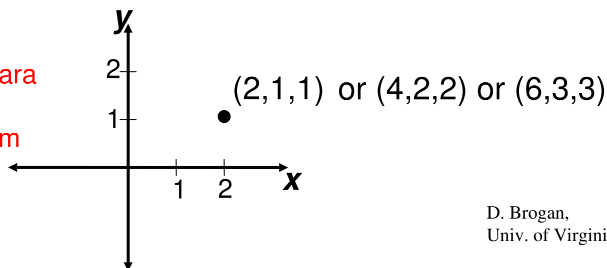


D. Brogan,
Univ. of Virginia

Coordenadas Homogêneas

- Coloca uma 3a coordenada para cada ponto 3D
  - (x, y, w) representa um ponto em (x/w, y/w)
  - (x, y, 0) representa um ponto no infinito
  - (0, 0, 0) não é permitido

Sistema conveniente para representar muitas transformações úteis em CG



D. Brogan, Univ. of Virginia

Transformações 2D Básicas

- Representação em matrizes 3x3

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escalamento

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

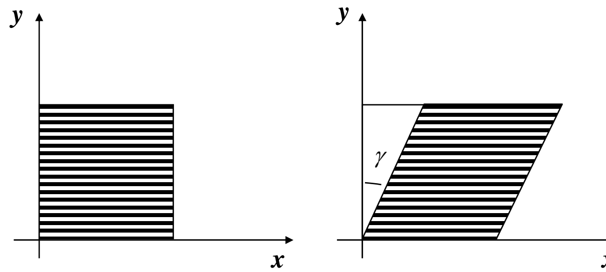
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento (Shear)

Cisalhamento (Shear)

$$x' = x + sh_x * y$$
$$y' = sh_y * x + y$$

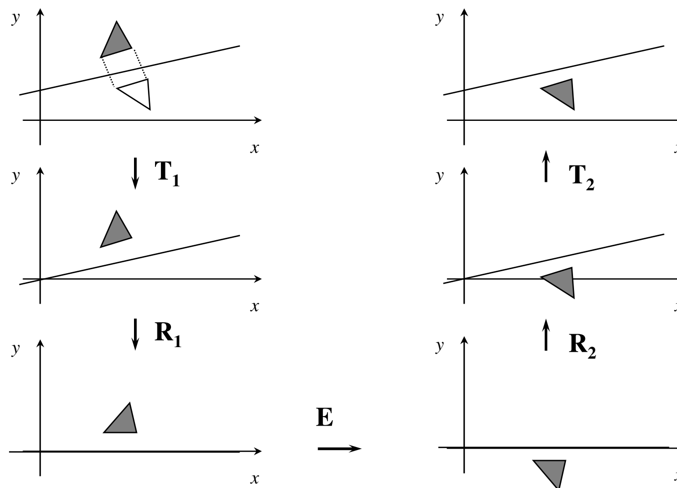
M. Gattass, PUC-Rio



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y\tan\gamma \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alberto Raposo – PUC-Rio

Concatenação de Transformações



M. Gattass, PUC-Rio

Alberto Raposo – PUC-Rio

P'= T_2 R_2 E R_1 T_1 P

Composição de Matrizes

- Transformações podem ser combinas pela multiplicação de matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & tx \\ 0 & 1 & ty \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

p' = $T(t_x,t_y)$ $R(\Theta)$ $S(s_x,s_y)$ **p**

D. Brogan, Univ. of Virginia

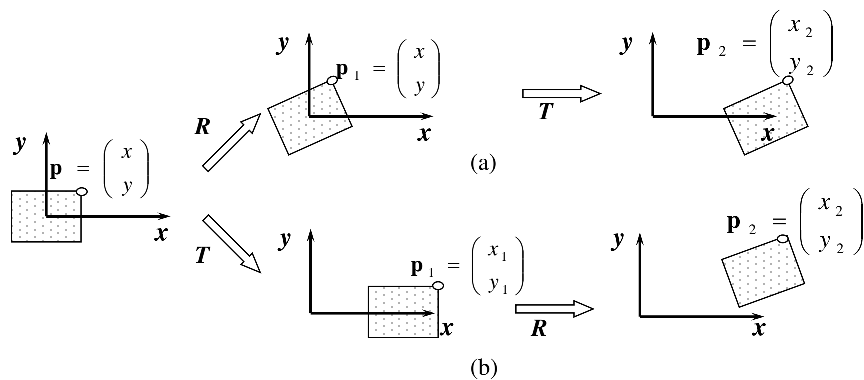
Composição de Matrizes

- Atenção: ordem das transformações faz diferença
  - Multiplicação de matrizes não é comutativa

p' = T * R * S * **p**

“Global” ⟷ “Local”

Ordem das Transformações



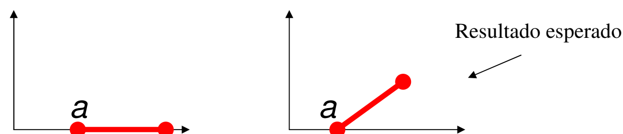
M. Gattass, PUC-Rio

Alberto Raposo – PUC-Rio

Ordem das Transformações

- Ex: rotacionar segmento em 45 graus em torno da extremidade *a*

Resultado esperado

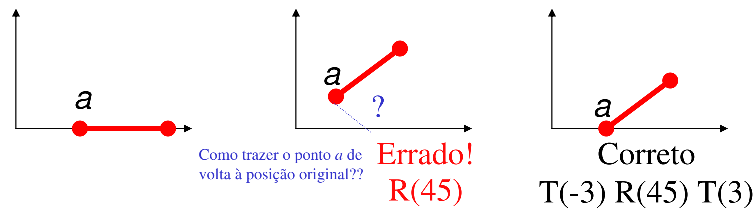


D. Brogan,
Univ. of Virginia

Alberto Raposo – PUC-Rio

Ordem das Transformações

- Erro: aplicar a rotação de 45º, R(45), afeta as duas extremidades
  - Pode-se tentar fazer a rotação e depois retornar o ponto *a* à sua posição original, mas quanto ele precisaria ser transladado?



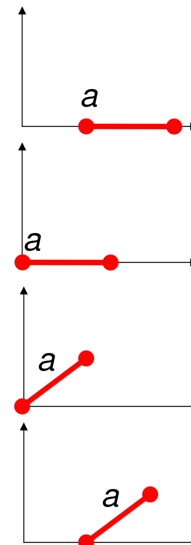
Alberto Raposo – PUC-Rio

D. Brogan, Univ. of Virginia

Ordem das Transformações

- Correto: isolar ponto *a* dos efeitos da rotação

1. Transladar a linha para colocar *a* na origem: T (-3)
2. Rotacionar linha em 45º: R(45)
3. Transladar *a* de volta: T(3)



Alberto Raposo – PUC-Rio

D. Brogan, Univ. of Virginia

Composição de Matrizes

T(3) R(45) T(-3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45) & -\sin(45) & 0 \\ \sin(45) & \cos(45) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A multiplicação começa da última para a primeira transformação

Composição de Matrizes

- Depois de ordenar as matrizes corretamente:
  - Multiplicá-las
  - Guardar resultado em uma só matriz
  - Usar essa matriz para realizar a transformação composta em cada um dos pontos que definem o objeto transformado (vértices, por exemplo)

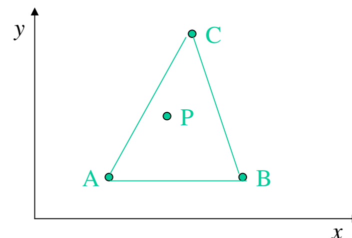
➢ Todos os vértices podem ser transformados com uma simples multiplicação de vetor por matriz.

Exercício 2D

- Considere o triângulo com os seguintes vértices em coordenadas homogêneas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  - Rotacione o triângulo de 90º (sentido anti-horário) em relação ao ponto P = (6,5)



Etapas da Solução

1. Definir matriz para transladar o triângulo de modo que o centro de rotação se mova para a origem do sistema de coordenadas
2. Definir matriz para rotacionar o triângulo
3. Definir matriz para transladar o triângulo de volta
4. Gerar matriz combinada da transformação
5. Transformar os vértices do triângulo

Etapas da Solução

1. Definir matriz para transladar o triângulo de modo que o centro de rotação se mova para a origem do sistema de coordenadas
   – Centro de rotação: P = (6,5)
   – Translação de -6 unidades em x e -5 unidades em y

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etapas da Solução

2. Definir matriz para rotacionar o triângulo
   - O ângulo de rotação é medido no sentido anti-horário: R(+90º)
     - cos(90º) = 0 e sin(90º) = 1

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etapas da Solução

3. Definir matriz para transladar o triângulo de volta
   - Translação de 6 unidades em x e 5 unidades em y

$$T2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etapas da Solução

4. Gerar matriz combinada da transformação

$$M = T2 \cdot R \cdot T1 = (T2 \cdot R) \cdot T1$$

$$T2 \cdot R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*0+0*1+6*0 & 1*(-1)+0*0+6*0 & 1*0+0*0+6*1 \\ 0*0+1*1+5*0 & 0*(-1)+1*0+5*0 & 0*0+1*0+5*1 \\ 0*0+0*1+1*0 & 0*(-1)+0*0+1*0 & 0*0+0*0+1*1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

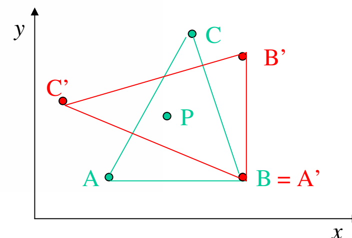
Etapas da Solução

5. Transformar os vértices do triângulo

$$\mathbf{A}' = M \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0*3+(-1)*2+11*1 \\ 1*3+0*2+(-1)*1 \\ 0*3+0*2+1*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = M \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = M \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformações em 3D

- Mesma idéia que em 2D:
  - Coordenadas homogêneas: (x,y,z,w)
  - Matrizes de trasnformação 4x4

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Transformações 3D Básicas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Identidade

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ z' \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{s}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$$

Escalamento

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ z' \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{t}_x \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{t}_y \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{t}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ z \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$$

Translação

Transformações 3D Básicas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Espelhamento em torno do plano YZ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Espelhamento em torno do plano XZ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Espelhamento em torno do plano XY

Transformações 3D Básicas

Rotação em torno de Z:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de Y:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$$

Rotação em torno de X:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Rotações Reversas

- Como desfazer uma rotação R(θ)?
  - Aplicar o inverso da rotação: R(-θ)
- Construindo R(-θ) :
  - cos(-θ) = cos(θ)
  - sin (-θ) = - sin (θ)
- Assim:

$R(-\theta) = R^T(\theta)$

$$\begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & \sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 3D

- Encontre as respectivas matrizes de transformação para os seguintes casos

a) Translação que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

b) Escalamento que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

c) Rotação em torno do eixo *z* que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

   - Qual o ângulo dessa rotação?

Solução

a) Translação que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$a_2 = a_1 + T_x, \quad b_2 = b_1 + T_y, \quad c_2 = c_1 + T_z.$$

$$\Rightarrow \quad T_x = a_2 - a_1, \quad T_y = b_2 - b_1, \quad T_z = c_2 - c_1.$$

Matriz de translação $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 - a_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 - c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução

b) Escalamento que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$a_2 = a_1 S_x, \quad b_2 = b_1 S_y, \quad c_2 = c_1 S_z.$$

$$\Rightarrow \quad S_x = a_2/a_1, \quad S_y = b_2/b_1, \quad S_z = c_2/c_1.$$

Matriz de escalamento $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} a_2/a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2/b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2/c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alberto Raposo – PUC-Rio

Solução

c) Rotação em torno do eixo *z* que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

Para rotação em torno de *z:*

$$a_2 = a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta, \quad b_2 = a_1 \sin\theta + b_1 \cos\theta, \quad c_2 = c_1.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} b_1 a_2 &= b_1 a_1 \cos\theta - b_1^2 \sin\theta \qquad (1) \\ a_1 b_2 &= a_1^2 \sin\theta + a_1 b_1 \cos\theta \qquad (2) \end{aligned}$$

(2) – (1): $a_1 b_2 - b_1 a_2 = (a_1^2 + b_1^2)\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \dfrac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1^2 + b_1^2}.$

Alberto Raposo – PUC-Rio

Solução

c) Rotação em torno do eixo *z* que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\sin\theta = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Substituindo em (1) ou (2):

Matriz de rotação $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_1^2+b_1^2} & -\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_1a_2-b_1b_2}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alberto Raposo – PUC-Rio

Solução

c) Rotação em torno do eixo *z* que leva o ponto $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ para o ponto $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$
- Qual o ângulo dessa rotação?

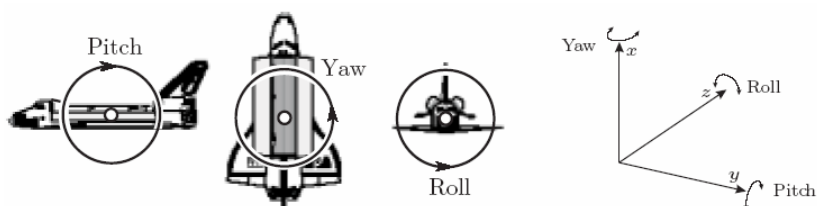
$$\sin\theta = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}.$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}. \qquad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{a_1 a_2 - b_1 b_2}$$

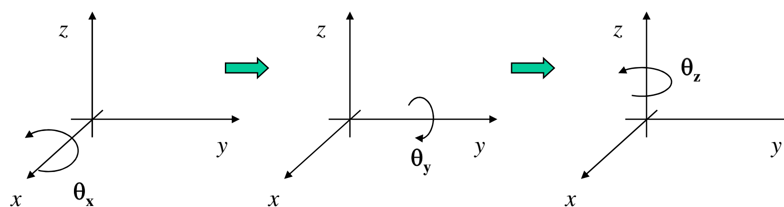
Alberto Raposo – PUC-Rio

Ângulos de Euler



Fundamentos da Comp. Gráfica
Jonas Gomes, Luiz Velho

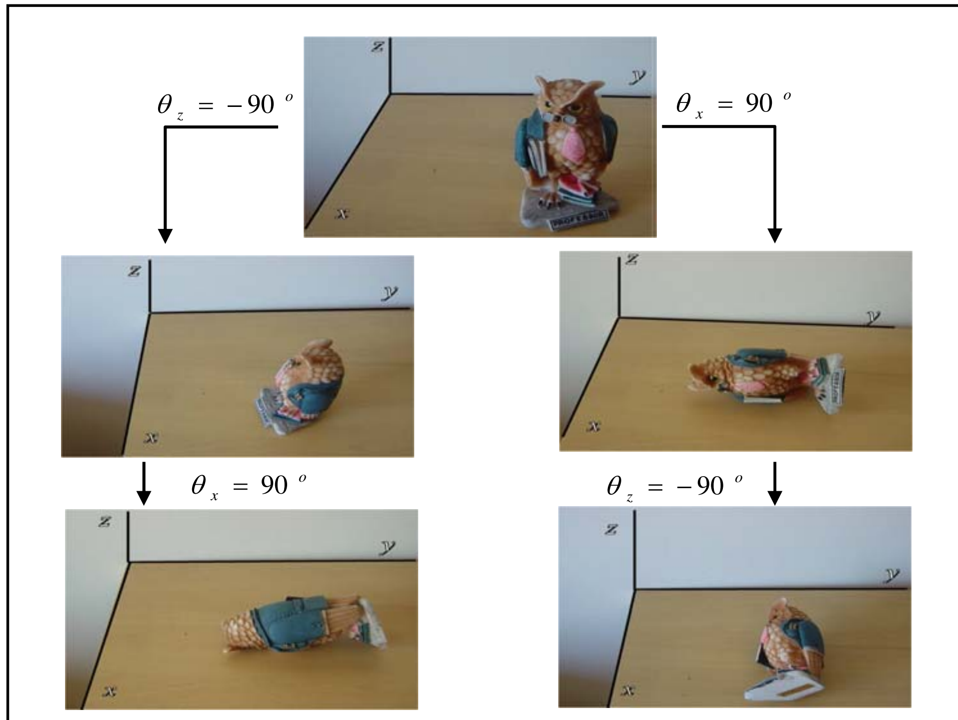
Ângulos de Euler



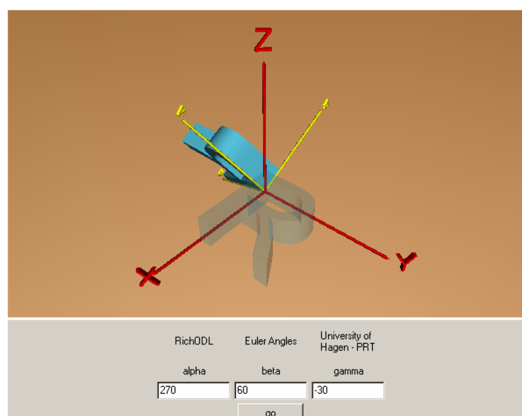
$$\begin{bmatrix} c_y c_z & c_y s_z & -s_y & 0 \\ s_x s_y c_z - c_x s_z & s_x s_y s_z + c_x c_z & s_x c_y & 0 \\ c_x s_y c_z + s_x s_z & c_x s_y s_z - s_x c_z & c_x c_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Notação: $c_x = \cos(\theta_x)$; $s_x = \sin(\theta_x)$ *e assim por diante*

M. Gattass, PUC-Rio



Demo: Ângulos de Euler



http://prt.fernuni-hagen.de/lehre/KURSE/PRT001/course_main/node10.html

Bibliografia Adicional

- Peter Shirley, **Fundamentals of Computer Graphics**, A K Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2002.
- Foley, J. D., Van Dam, A., Feiner, S. K., e Huhes, J. F., Phlips, L. R., **Introduction to Computer Graphics**, Addison-Wesley, 1995.
- Foley, J. D., Van Dam, A., Feiner, S. K., e Huhes, J. F., **Computer Graphics: Principles and Practices**, (Systems Programming), 2nd edition in C, Addison-Wesley, 1995.
- The Annotated VRML 97 Reference: http://accad.osu.edu/~pgerstma/class/vnv/resources/info/AnnotatedVrmlRef/Book.html